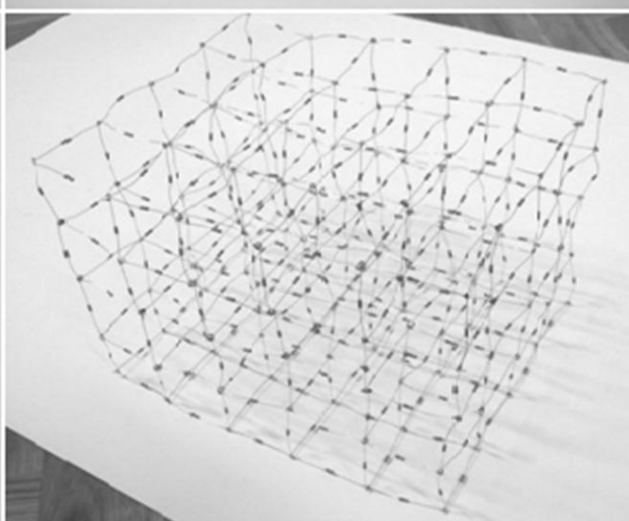
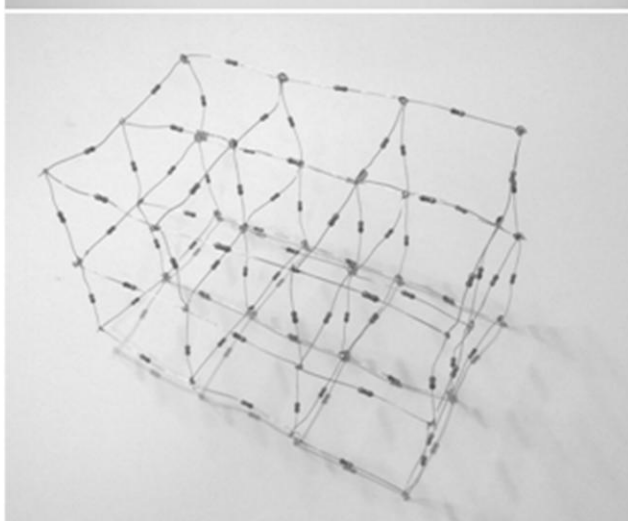
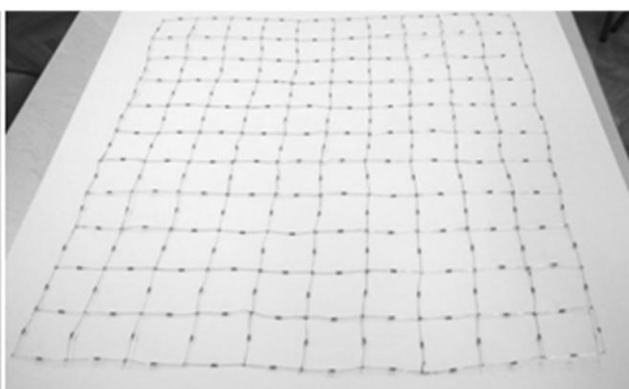
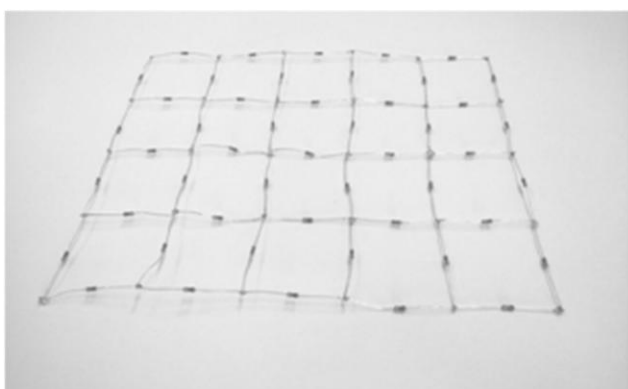


Przestrzenne układy oporników





Bartosz Marchlewicz

Tomasz Sokołowski

Mateusz Zych

Pod opieką prof. dr. hab. Janusza Kempy

Liceum Ogólnokształcące im. marsz. S. Małachowskiego
w Płocku

Wstęp

Do podjęcia problematyki złożonych układów oporników zainspirowało nas zadanie, które wielokrotnie pojawiało się na konkursach fizycznych:

„Rozważmy nieskończoną sieć oporników w kształcie kratki. Każdemu węzłowi tej sieci przyporządkujemy parę liczb całkowitych (k,l) i podłączamy ją do źródła napięcia w punktach $(0,0)$ i $(1,0)$. Wyznaczyć opór zastępczy układu.”

Zadanie to daje się stosunkowo łatwo rozwiązać, stosując zasadę superpozycji natężeń prądu. Przyjmujemy, że prąd, który wpływa do węzła $(0,0)$ rozplywa się po równo na cztery gałęzie wychodzące z tego węzła (wynika to z symetrii siatki). Analogicznie rozważamy prąd wypływający z węzła $(1,0)$. Spływa on po równo z czterech gałęzi. Aby otrzymać natężenie prądu przepływającego między tymi węzłami nakładamy na siebie omawiane sytuacje. Otrzymujemy:

$$I = \frac{1}{4}I_0 + \frac{1}{4}I_0 = \frac{1}{2}I_0$$

Po skorzystaniu z prawa Ohma:

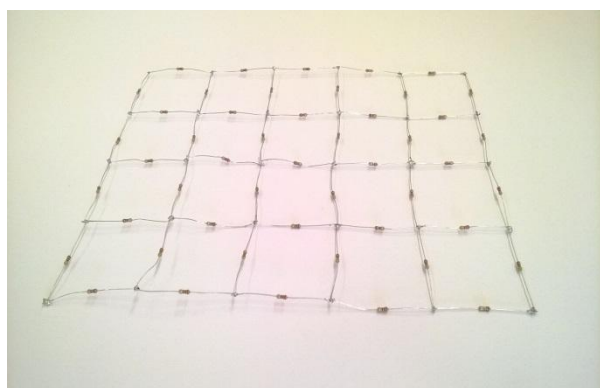
$$R = \frac{1}{2}R_0$$

gdzie R_0 jest oporem pojedynczego rezystora.

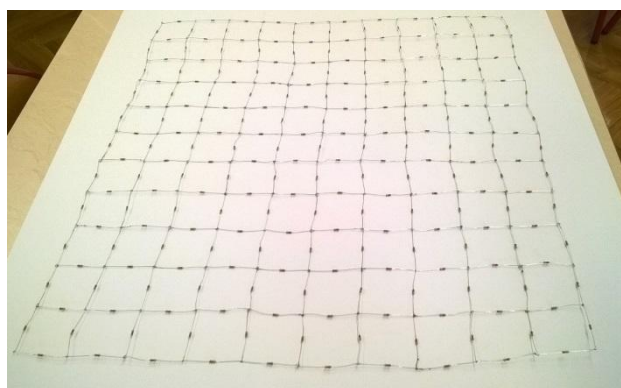
Postanowiliśmy zbudować taki układ i wykonać pomiary, aby sprawdzić jak duża musi być siatka, aby można było traktować ją jako nieskończoną. Posiadając już taką siatkę staraliśmy się opisać jak prąd zachowuje się wewnątrz takiego układu oporników.

Budowa siatki

Skonstruowaliśmy kilka siatek różnych rozmiarów. Zależało nam, aby wszystkie one miały taką samą symetrię. Uznaliśmy, że najlepiej, aby jeden opornik środkowy otoczony był symetrycznie z każdej strony taką samą ilością oporników (znajdował się w równej odległości w linii prostej od każdej z krawędzi). We wszystkich siatkach używaliśmy rezystorów o oporze $R_0 = 2,7k\Omega \pm 5\%$. Oporniki łączyliśmy ze sobą używając cyny lutowniczej.



Siatka 5x4



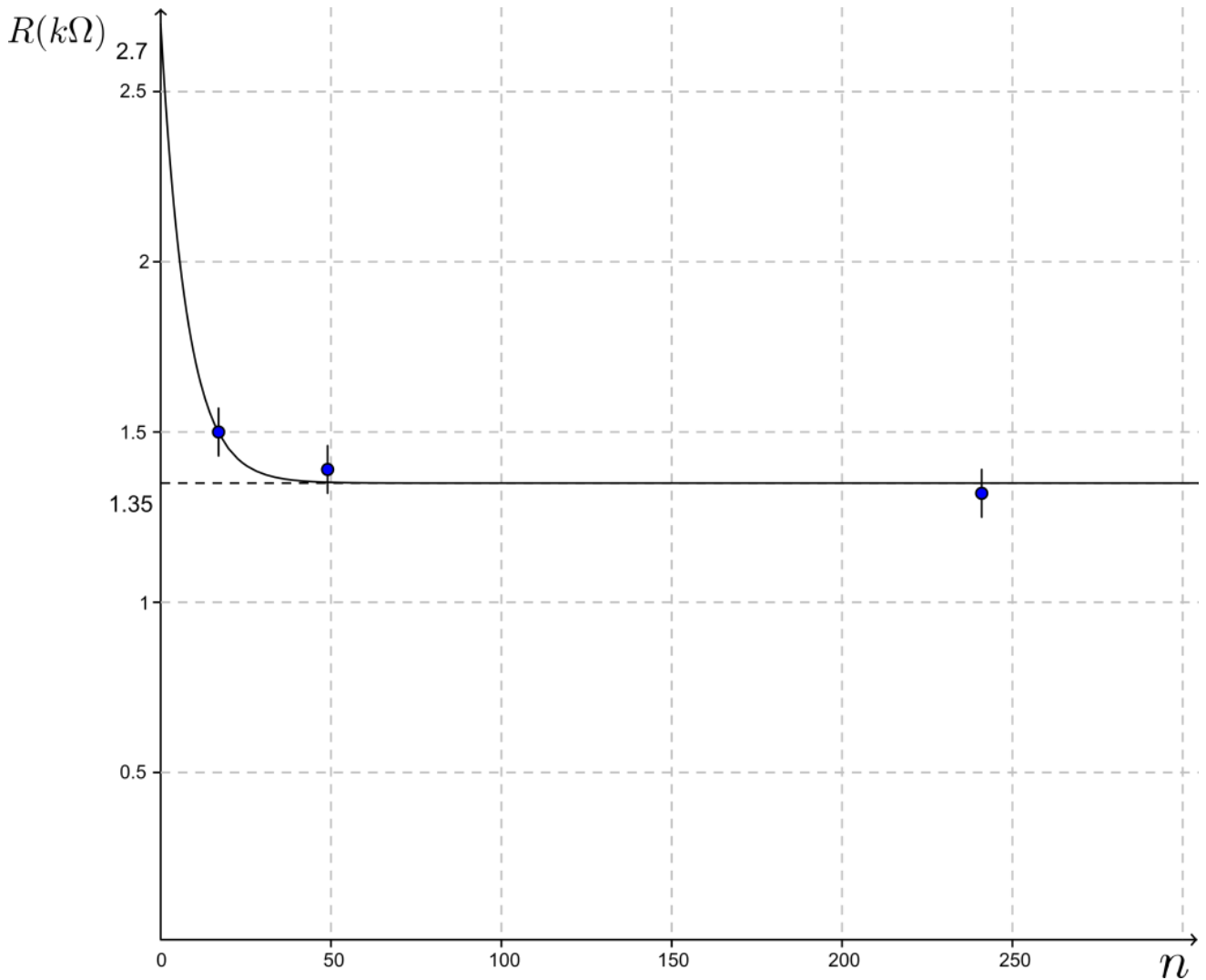
Siatka 11x10

Pomiary między sąsiednimi węzłami siatki

Zależność oporu zastępczego od rozmiaru siatki przedstawia tabela:

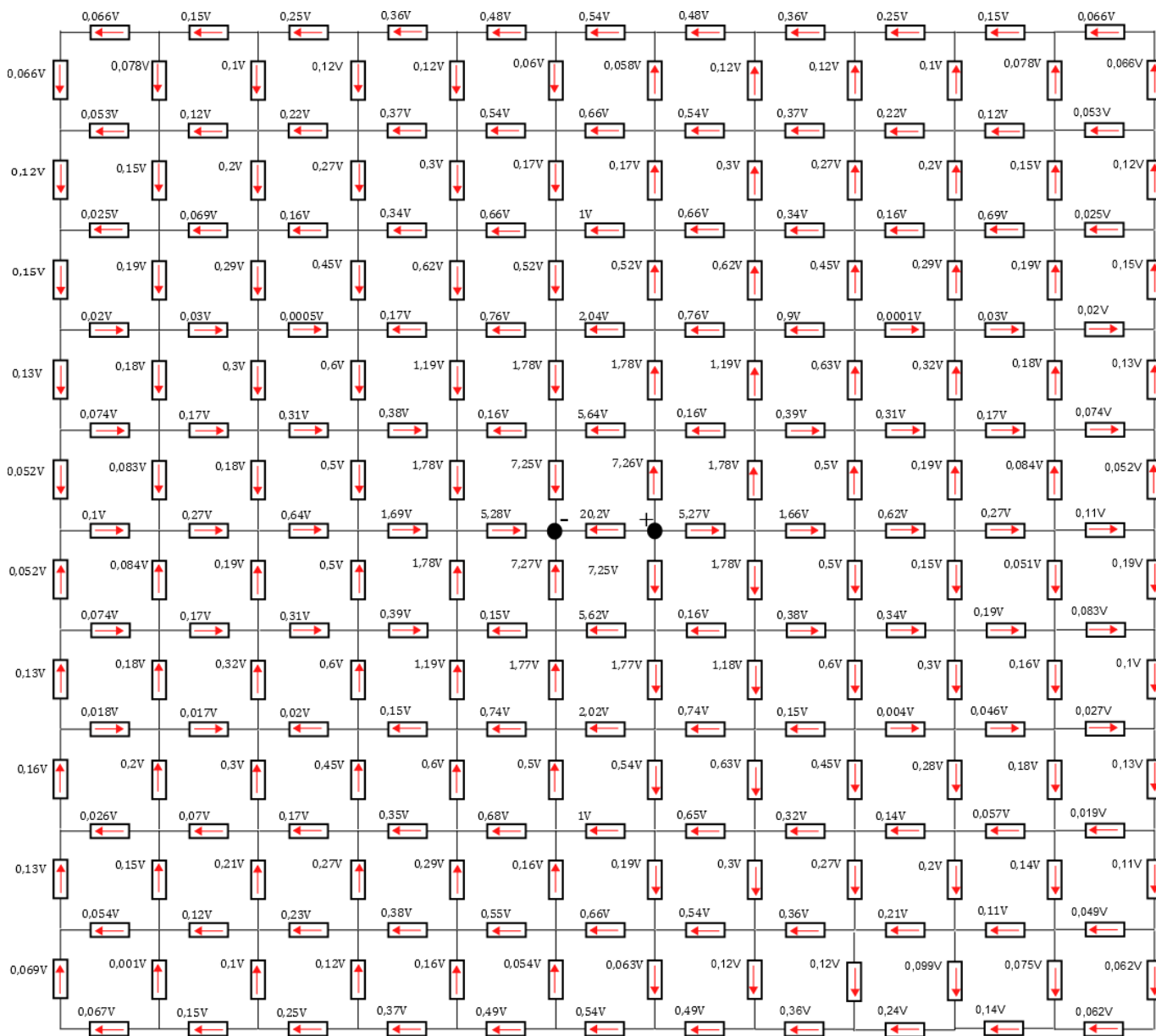
Rozmiar siatki	3x2	5x4	11x10
Opór[k Ω]	1,50 \pm 5%	1,39 \pm 5%	1,32 \pm 5%

A oto zaproponowana przez nas zależność wykładnicza oporu siatki od ilości oporników:

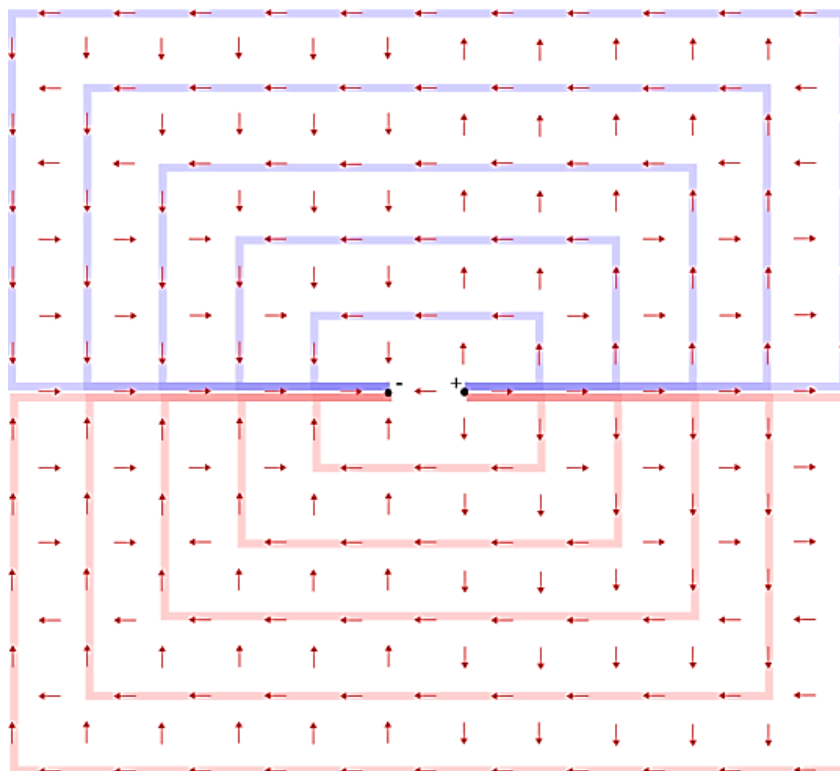


Jak widać, wraz ze wzrostem rozmiaru siatki (całkowitej liczby oporników) opór zastępczy układu maleje zbiegając do $\frac{1}{2}R_0$.

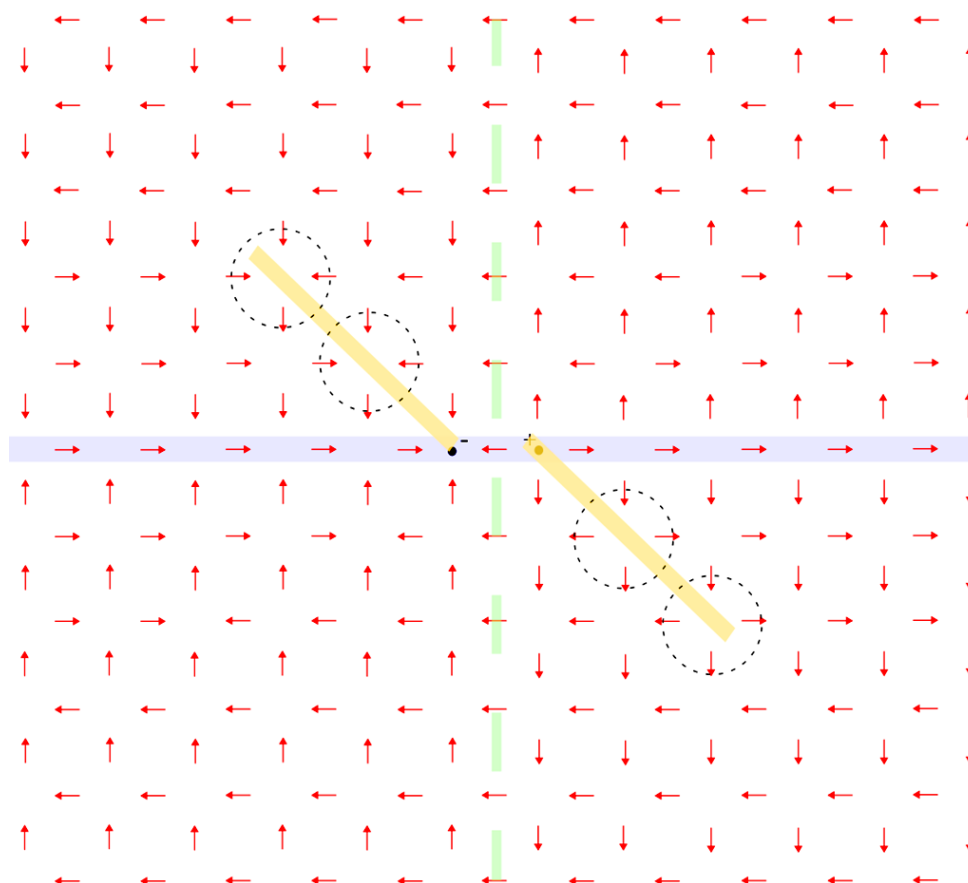
Dla największej z siatek ($n=241$) postanowiliśmy dokonać bardziej szczegółowych pomiarów, aby sprawdzić, jak zachowuje się prąd płynący przez nią. Poniższy rysunek przedstawia rozkład napięć i kierunki prądów na poszczególnych opornikach:



Okazuje się, że kierunki przepływu prądu układają się w charakterystyczne pierścienie, co doskonale widać na kolejnym rysunku:



Warto ponadto zauważyć, że górna i dolna połówka siatki są swoimi lustrzanymi odbiciami. Charakterystyczne są również linie ukośne wzdłuż których układają się powtarzające się schematy przepływu (zaznaczone okręgami). Oczywiście bliżej krawędzi siatki pojawiają się efekty brzegowe, które je zaburzają.

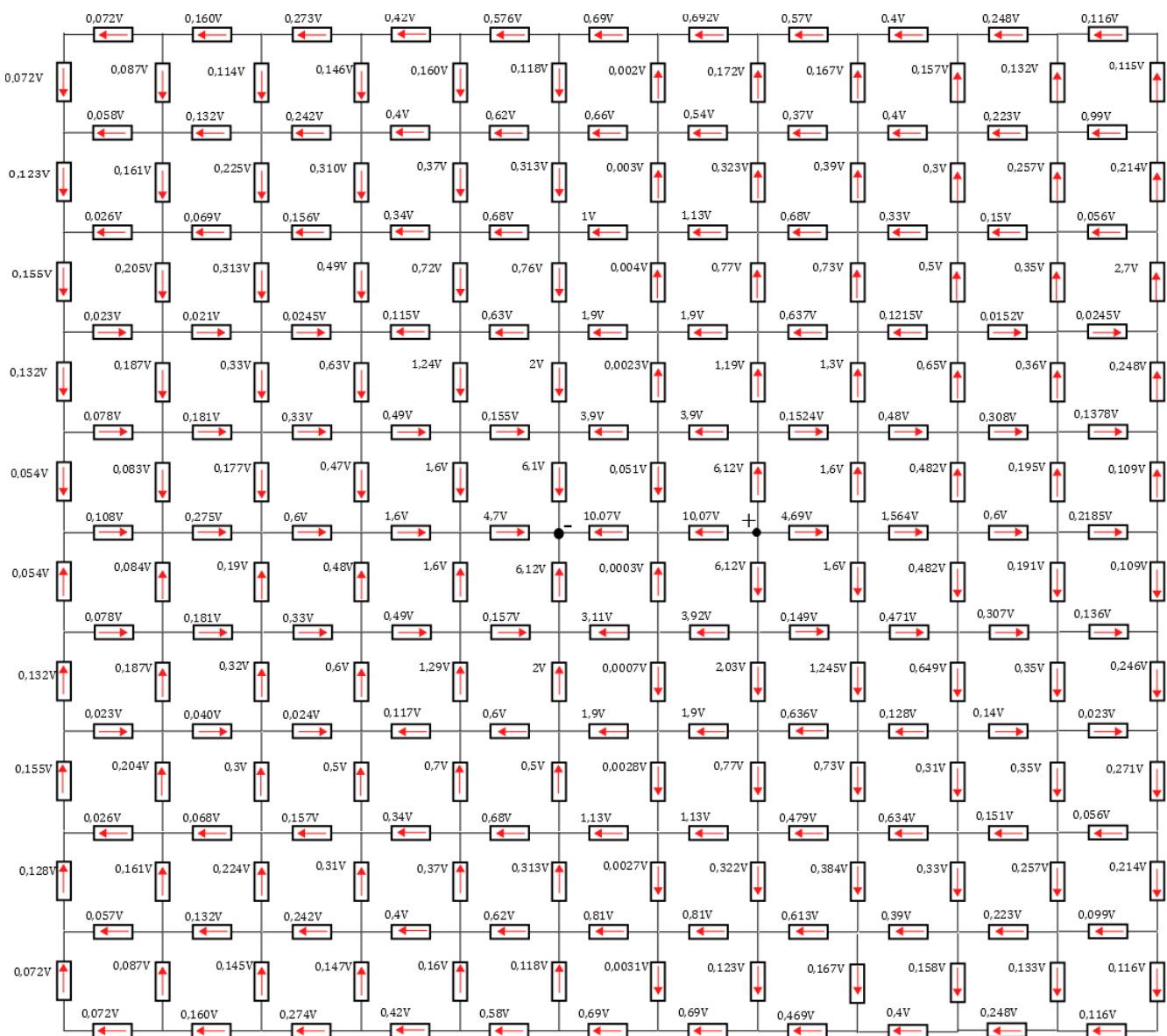


Pomiary między węzłami siatki oddalonymi od siebie o dwie jednostki

Zależność oporu zastępczego od rozmiaru siatki przedstawia tabela:

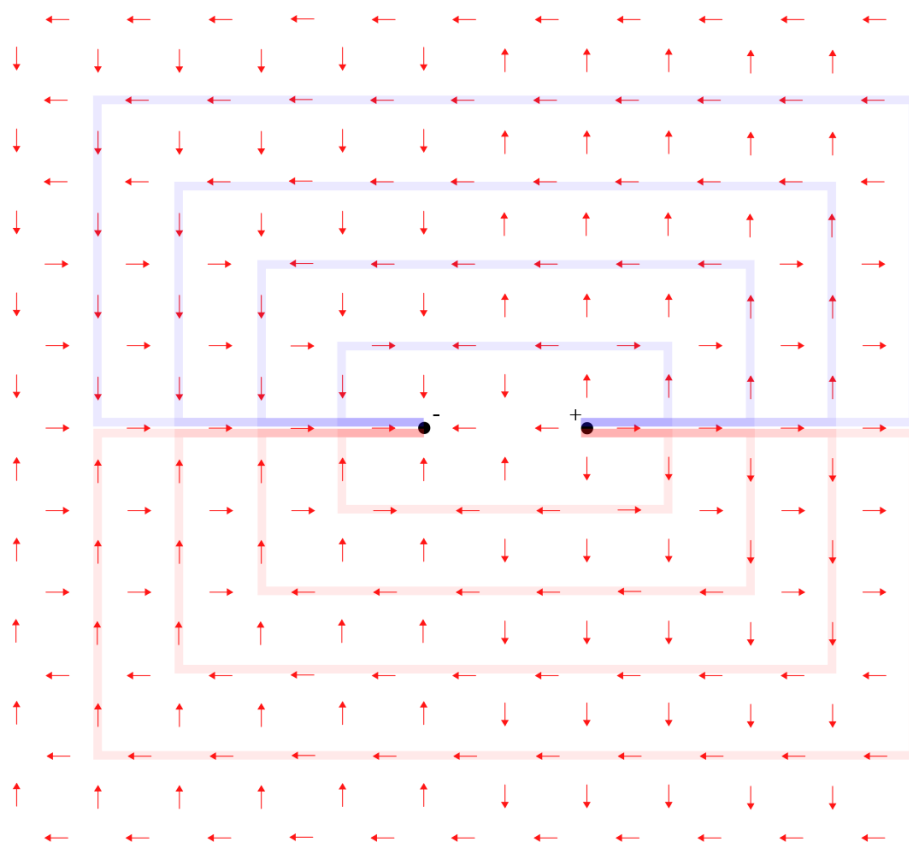
Rozmiar siatki	5x4	11x10
Opór[kΩ]	$2,17 \pm 5\%$	$1,98 \pm 5\%$

Tutaj również pomiary zgadzają się z przewidywaniami teoretycznymi. Wraz ze wzrostem rozmiaru siatki (całkowitej liczby oporników) opór zastępczy układu maleje zbiegając do $R = R_0(2 - \frac{4}{\pi})^*$. Dla układu 11x10 (n=241) opór oczekiwany* wynosi 1,97kΩ. A oto rozkład napięć i kierunków prądu:

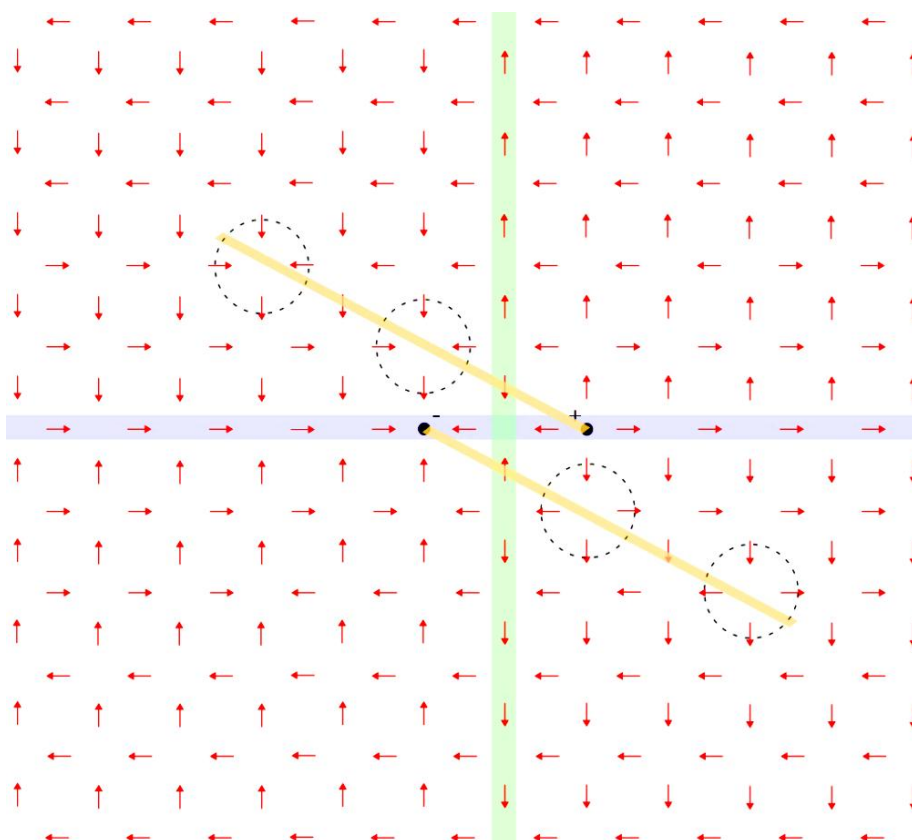


* Andrzej KomisarSKI - „Jaki jest opór na zaciskach opornika nieskończonej kratownicy o bokach złożonych z oporników R”

Tu również widzimy charakterystyczne pierścienie:



oraz powtarzające się układy, leżące na liniach ukośnych, jednak o innym nachyleniu niż w przypadku wcześniejszego układu (por. rysunek dla prądu przyłożonego do sąsiednich węzłów):

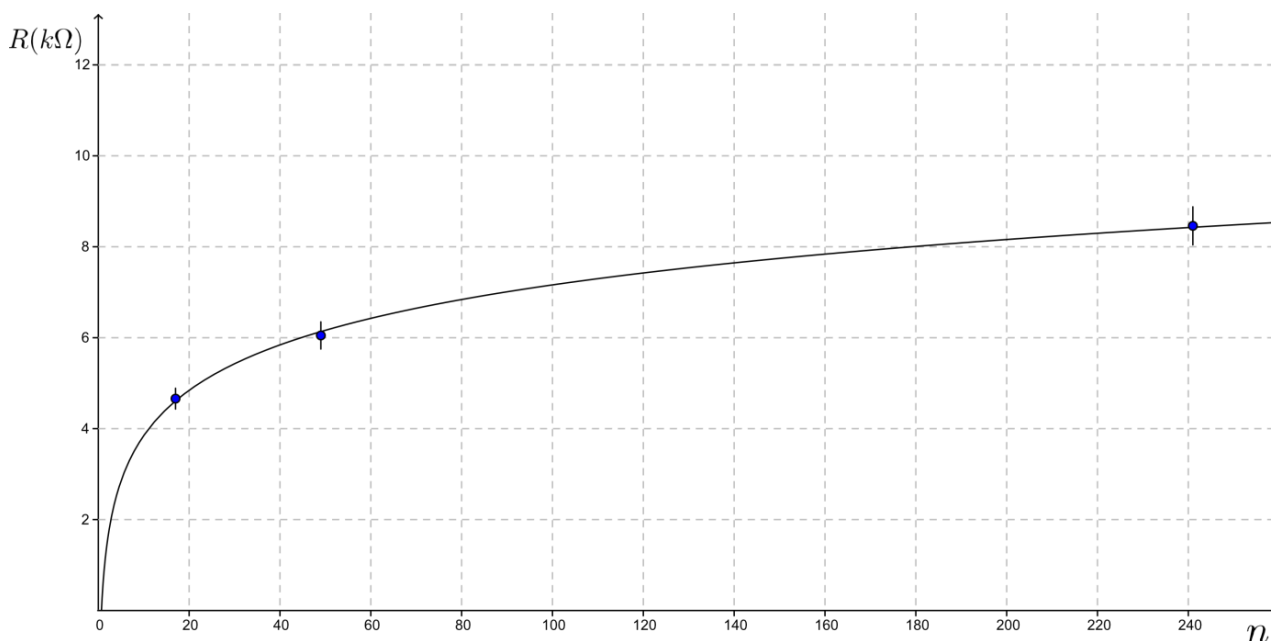


Warto zauważyć, że wzdłuż linii zacieniowanej na zielono, płynący prąd jest bardzo niewielki (napięcia na tych opornikach są minimalne - rzędu kilku miliwoltów). Dodatkowo, po lewej stronie od tej linii prądy w pionowych opornikach spływają do niebieskiej osi, natomiast po prawej stronie – wypływają z niebieskiej osi. Co ciekawe, oś zieloną można wytyczyć również w układzie, gdzie napięcia zostały przyłożone do sąsiednich węzłów. W tej sytuacji linia ta będzie przebiegała pomiędzy tymi węzłami (patrz: rysunek dla prądu przyłożonego do sąsiednich węzłów).

Pomiar oporu po przekątnej siatki

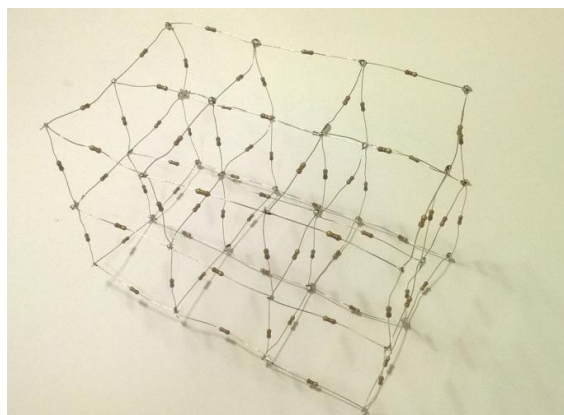
Rozmiar siatki	3x2	5x4	11x10
Opór[kΩ]	$4,66 \pm 5\%$	$6,05 \pm 5\%$	$8,46 \pm 5\%$

Pomiar oporu między dwoma najbardziej oddalonymi punktami siatki zgodnie z przewidywaniami rośnie wraz ze wzrostem rozmiaru siatki. Oto nasza propozycja zależności logarytmicznej między liczbą oporników w siatce (n), a oporem całej siatki:

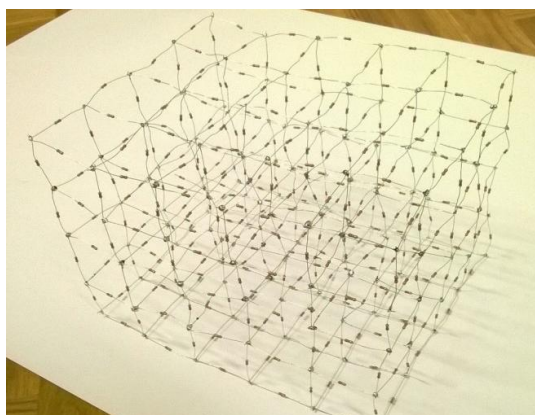


Siatki przestrzenne

Zainspirowani wynikami dotyczącymi płaskiej siatki postanowiliśmy przenieść doświadczenie w trzy wymiary. W tym celu zbudowaliśmy takie oto układy:



kostka 3x2x2



kostka 5x4x4

Pomiar oporu między sąsiednimi węzłami kostki

Wspomnianą wcześniej zasadę superpozycji natężeń można zastosować również dla układów trójwymiarowych. Zauważając, że do jednego węzła prąd spływa symetrycznie sześcioma gałęziami, a z drugiego wypływa również sześcioma i stosując przekształcenia analogiczne jak we wstępie, otrzymujemy:

$$R = \frac{1}{3}R_0$$

Zależność oporu zastępczego od rozmiaru kostki przedstawia tabela:

Rozmiar kostki	3x2x2	5x4x4
Opór[kΩ]	0,94 ± 5%	0,90 ± 5%

Jak widać, wraz ze wzrostem rozmiaru kostki (całkowitej liczby oporników) opór zastępczy układu maleje zbiegając do $\frac{1}{3}R_0$ i już dla kostki 5x4x4 w dobrym przybliżeniu spełnia ten warunek.

Wnioski

- Siatki/prostopadłościany złożone z kilkudziesięciu-kilkuset oporników można w dobrym przybliżeniu uważać za nieskończone (wyłączając efekty brzegowe),
- Napięcia w takich układach maleją wraz z odległością,
- W obu układach, zarówno przy napięciu przyłożonym do sąsiednich węzłów, jak i oddalonych o jeden, pojawia się oś symetrii, oznaczona na niebiesko,
- W obu układach, zarówno przy napięciu przyłożonym do sąsiednich węzłów, jak i oddalonych o jeden, pojawia się linia, oznaczona na zielono, która dzieli oporniki na te, w których prądy spływają do osi symetrii oraz na te, w których prądy z osi symetrii wypływają,
- W obu układach, zarówno przy napięciu przyłożonym do sąsiednich węzłów, jak i oddalonych o jeden, pojawiają się linie, oznaczone na pomarańczowo, wzdłuż których układają się węzły z trzema prądami wpływającymi i jednym wypływającym lub odwrotnie. Linie te są jednak różnie nachylone względem brzegu siatki, zależnie od tego, czy napięcie zostało przyłożone do sąsiednich, czy oddalonych węzłów.

Bibliografia

- Andrzej KomisarSKI - „Jaki jest opór na zaciskach opornika nieskończonej kratownicy o bokach złożonych z oporników R”